Fernando Soares

4. Morfologia Matemática binária

Teoria elementar de conjuntos. Propriedades dos conjuntos. Propriedades das transformações morfológicas. Noção de elemento estruturante. Transformação de vizinhança. Transformações morfológicas elementares. Transformações Tudo-ou-Nada. Adelgaçamento e Espessamento. Transformações geodésicas. Número de Euler (conectividade).

Fernando Soares

Introdução

Origens:

- Trabalhos pioneiros de Georges Matheron e Jean Serra (década de 60, França).
- Criação do *Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau* (1968).

Objectivo:

- A morfologia matemática baseia-se na teoria dos conjuntos, e pretende quantificar estruturas do ponto de vista geométrico.

Fernando Soares

Introdução

Metodologia:

1. Utiliza a noção de conjunto para representar estruturas.

2. Transformação dos conjuntos por forma a torná-los mensuráveis:

    - Interacção do conjunto de objectos em estudo, com outro objecto com forma conhecida (elemento estruturante).

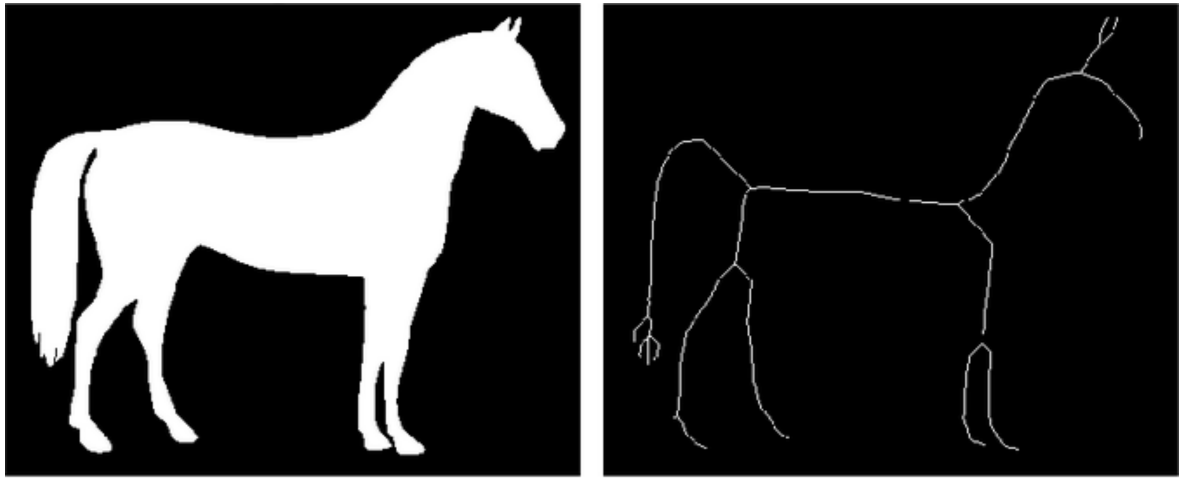
    - A transformação do conjunto inicial, ao longo de sucessivas operações, evidencia as suas características estruturais, que são registadas ao longo dos novos conjuntos gerados, o que implica que o conjunto transformado é mais simples que o conjunto original.

Fernando Soares

Introdução

Metodologia:

3. Realização de medidas sobre os conjuntos transformados.



Medida:

- Superfície
- Forma
- Perímetro
- Etc.

$\xrightarrow{\quad T \quad}$ $\xrightarrow{\quad M \quad}$

Fernando Soares

Introdução

O processamento morfológico de imagem pode ser aplicado nos seguintes contextos:

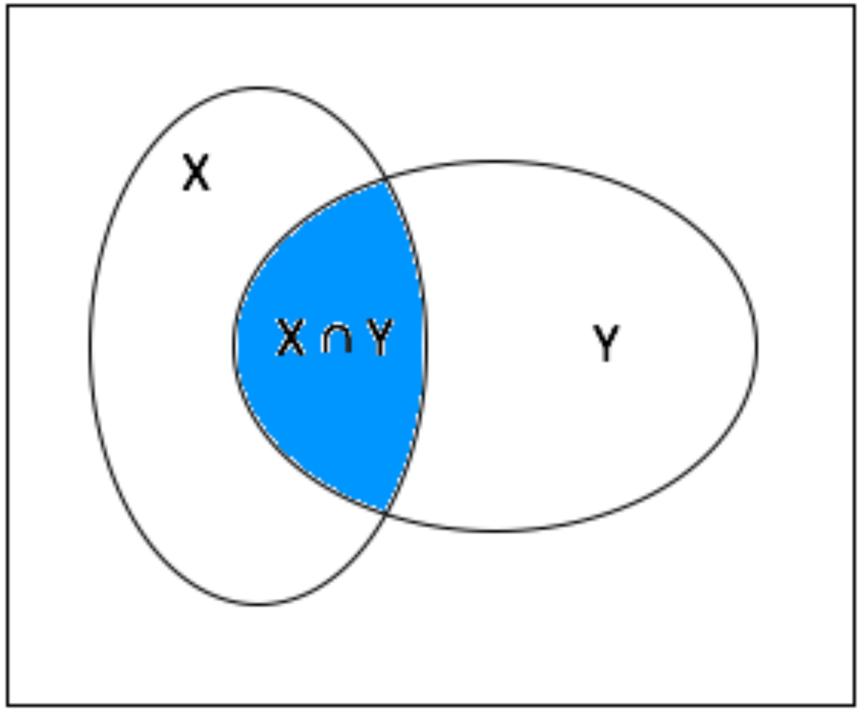
- Morfologia binária: as imagens são binárias (mais frequente).
- Morfologia numérica: as imagens podem ser, ou de níveis de cinzento (monocromáticas), ou coloridas (policromáticas).
- Os termos «Morfologia» e «Matemática», associados (que constituem a designação desta teoria), referem-se à utilização de conceitos de lógica de conjuntos e operações numéricas.

Teoria elementar de conjuntos

Intersecção

$$\boxed{X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}}$$

- Comutativa: $X \cap Y = Y \cap X$
- Associativa: $X \cap (Y \cap Z) = (Y \cap X) \cap Z$
- Idempotente: $X \cap X = X$



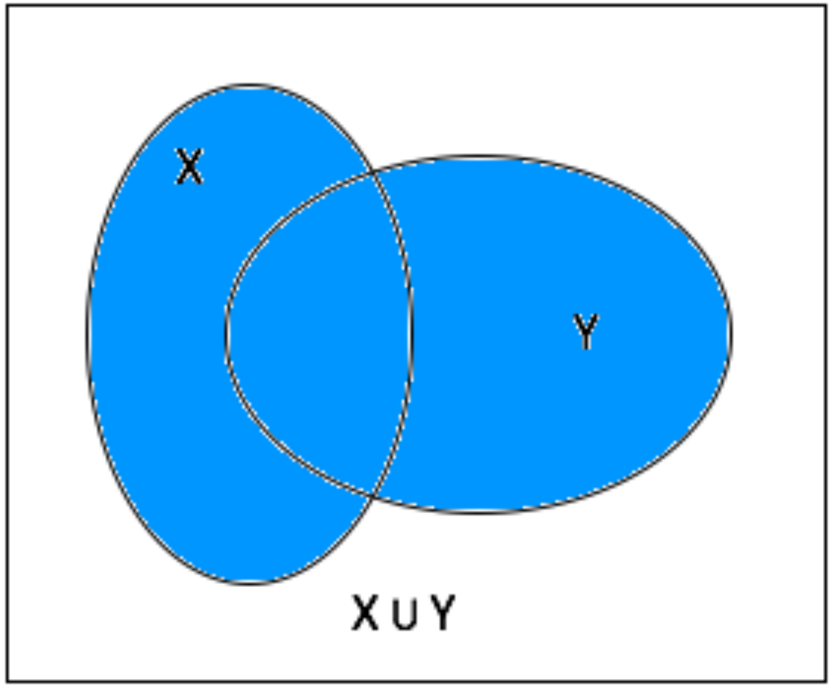
Fernando Soares

Teoria elementar de conjuntos

Reunião

$$X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$$

- Comutativa: $X \cup Y = Y \cup X$
- Associativa: $X \cup (Y \cup Z) = (Y \cup X) \cup Z$
- Idempotente: $X \cup X = X$



Teoria elementar de conjuntos

Relação entre a intersecção e a união (distributividade):

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

Fernando Soares

Teoria elementar de conjuntos

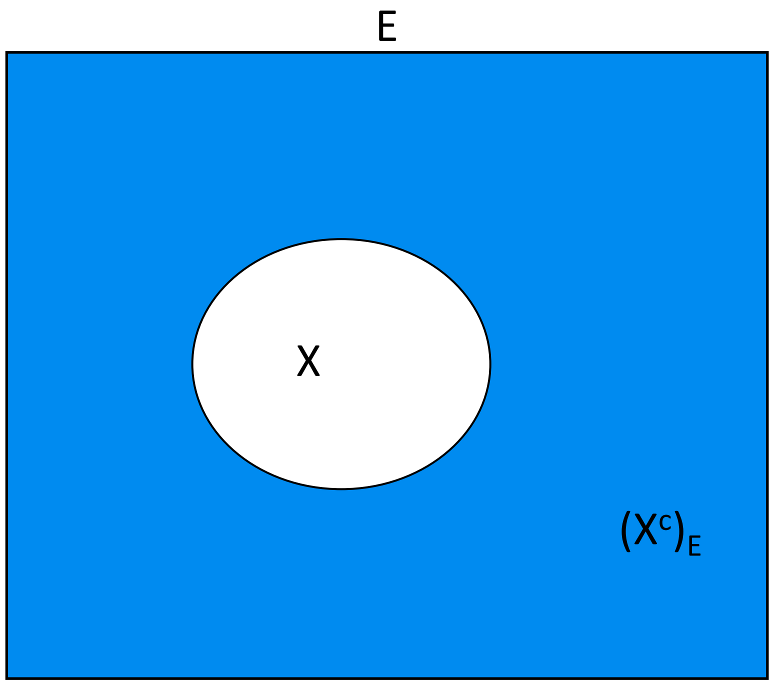
Conjunto complementar

$$\boxed{(X^c)_E = \{x: x \in E \wedge x \notin X\}}$$

- Fórmulas de Morgan:

$$\left((X \cap Y)^c\right)_E = (X^c)_E \cup (Y^c)_E$$

$$\left((X \cup Y)^c\right)_E = (X^c)_E \cap (Y^c)_E$$



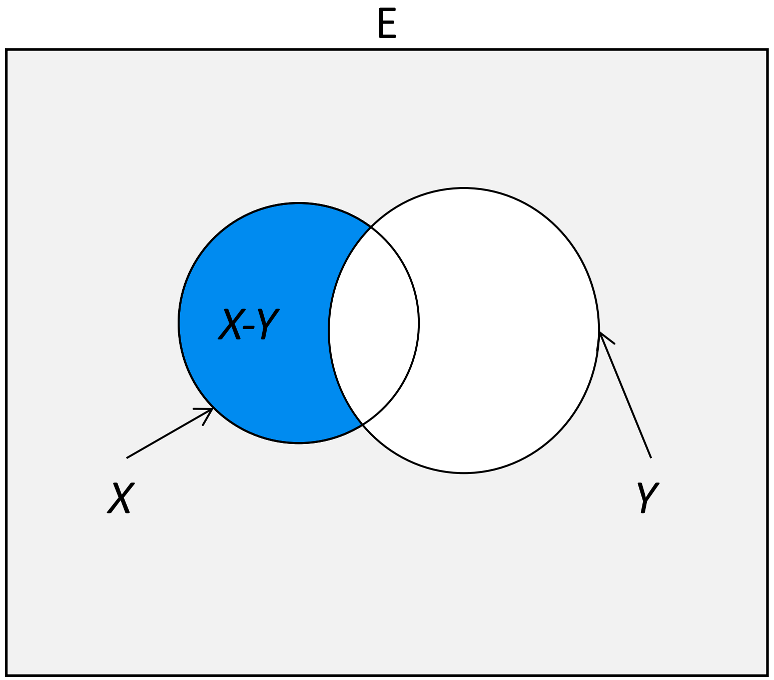
Teoria elementar de conjuntos

Diferença lógica

$$X - Y = \{x: x \in X \wedge x \notin Y\}$$

ou

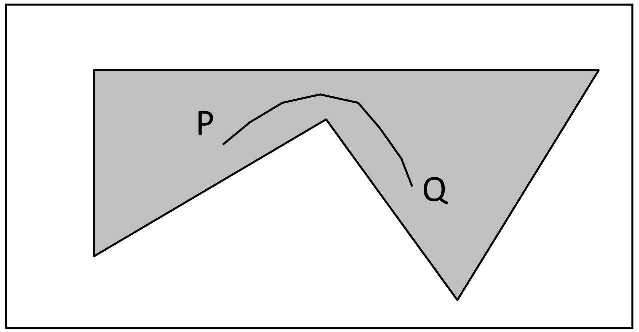
$$X - Y = X \cap (X \cap Y)^c$$



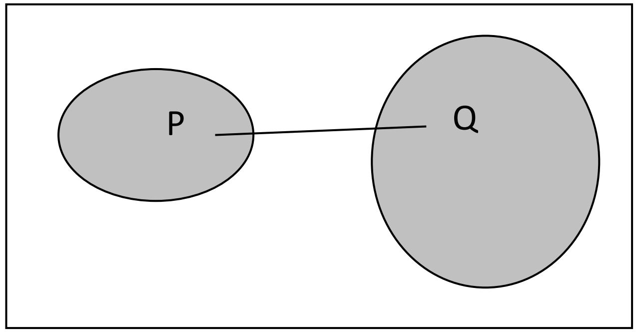
Fernando Soares

Propriedades dos conjuntos

Conexidade: um conjunto X diz-se conexo se, para quaisquer dois pontos $P(x_i,y_j)$ e $Q(x_m,y_n)$ nele incluídos, existe pelo menos um caminho que os une e que está totalmente incluído em X.



X Conexo

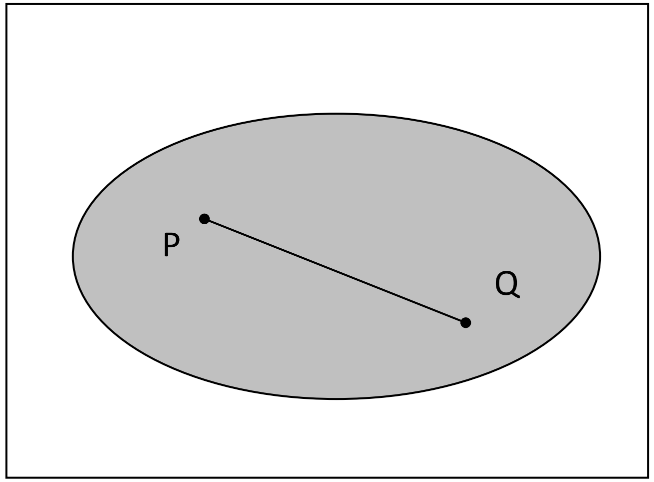


X não conexo

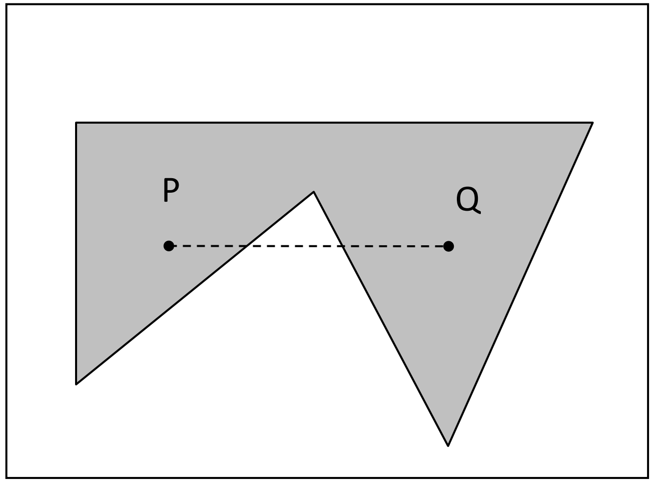
A conexidade de um conjunto depende, no entanto, da forma como se encontra definida a ligação entre os pixels numa malha digital (nas malhas digitais quadradas com conectividade-4 e conectividade-8, ou hexagonal com conectividade-6).

Propriedades dos conjuntos

Convexidade: um conjunto X diz-se convexo se, qualquer que seja o par de pontos $P(x_i,y_i)$ e $Q(x_m,y_n)$ nele incluídos, o segmento de recta que os une está totalmente incluído em X.



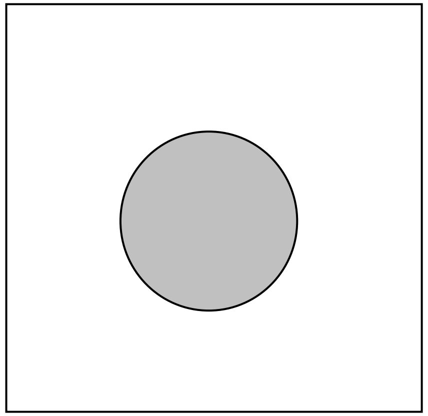
X convexo



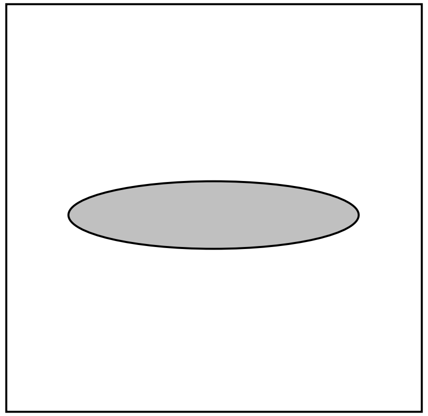
X não convexo

Propriedades dos conjuntos

Isotropia: Um conjunto X diz-se isotrópico se está uniformemente espalhado segundo todas as direções.



X isótropo



X anisótropo

Predominando uma dada direcção, está-se perante um conjunto anisotrópico. Este conceito está associado à estrutura espacial dos objetos.

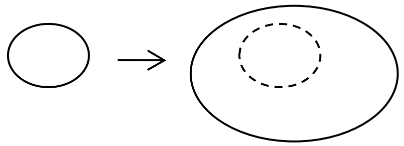
Fernando Soares

Propriedades das transformações morfológicas

Se φ é uma transformação morfológica então obedece a uma ou mais do que uma das seguintes propriedades:

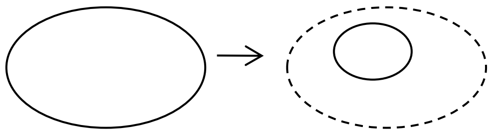
- φ é **extensiva** se o conjunto resultante contém conjunto inicial X.

$$\boxed{X \subset \varphi(X)}$$



- φ é **anti-extensiva** se o conjunto resultante está contido no conjunto inicial X.

$$\boxed{\varphi(X) \subset X}$$

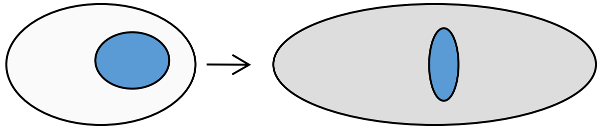


Fernando Soares

Propriedades das transformações morfológicas

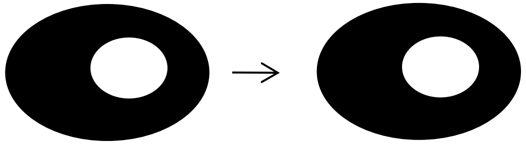
- φ é **crescente** se a relação de inclusão entre os conjuntos inicial e resultante se mantém.

$$\boxed{Y \subset X \Rightarrow \varphi(Y) \subset \varphi(X)}$$



- φ é **idempotente** se a sua aplicação sucessiva a X não o altera.

$$\boxed{\varphi(\varphi(X)) \equiv X}$$



Fernando Soares

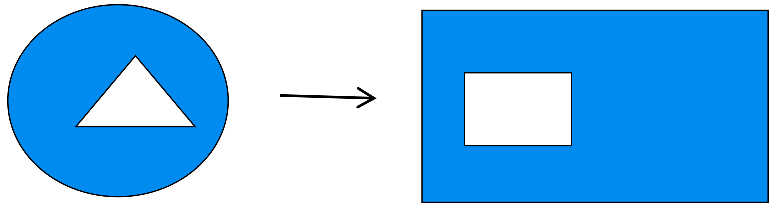
Propriedades das transformações morfológicas

- Duas transformações morfológicas φ_1 e φ_2 são **duais** se:

$$\boxed{\varphi_1(X) \equiv \varphi_2(X^c)}$$

- Finalmente, uma transformação é dita **homotópica** se ela não modifica o número de conexidade E de um conjunto X, isto é:

$$\boxed{E[\varphi(X)] = E[X]}$$



Fernando Soares

Noção de elemento estruturante

Elemento estruturante (B): É um caso particular de imagem binária, sendo usualmente pequeno e simples (por exemplo $B_{3\times3}$ com todos os valores iguais a um).

Uma transformação morfológica só pode ser realizada com a definição prévia de um elemento estruturante.

Como o próprio nome indica, quando associado a uma certa transformação morfológica, B percorre a imagem com o propósito de aferir se "encaixa" ou não nos objectos nela presentes. No processo, pode modificar a forma e as características topológicas desses objectos (por exemplo, a conexidade ou a convexidade).

Fernando Soares

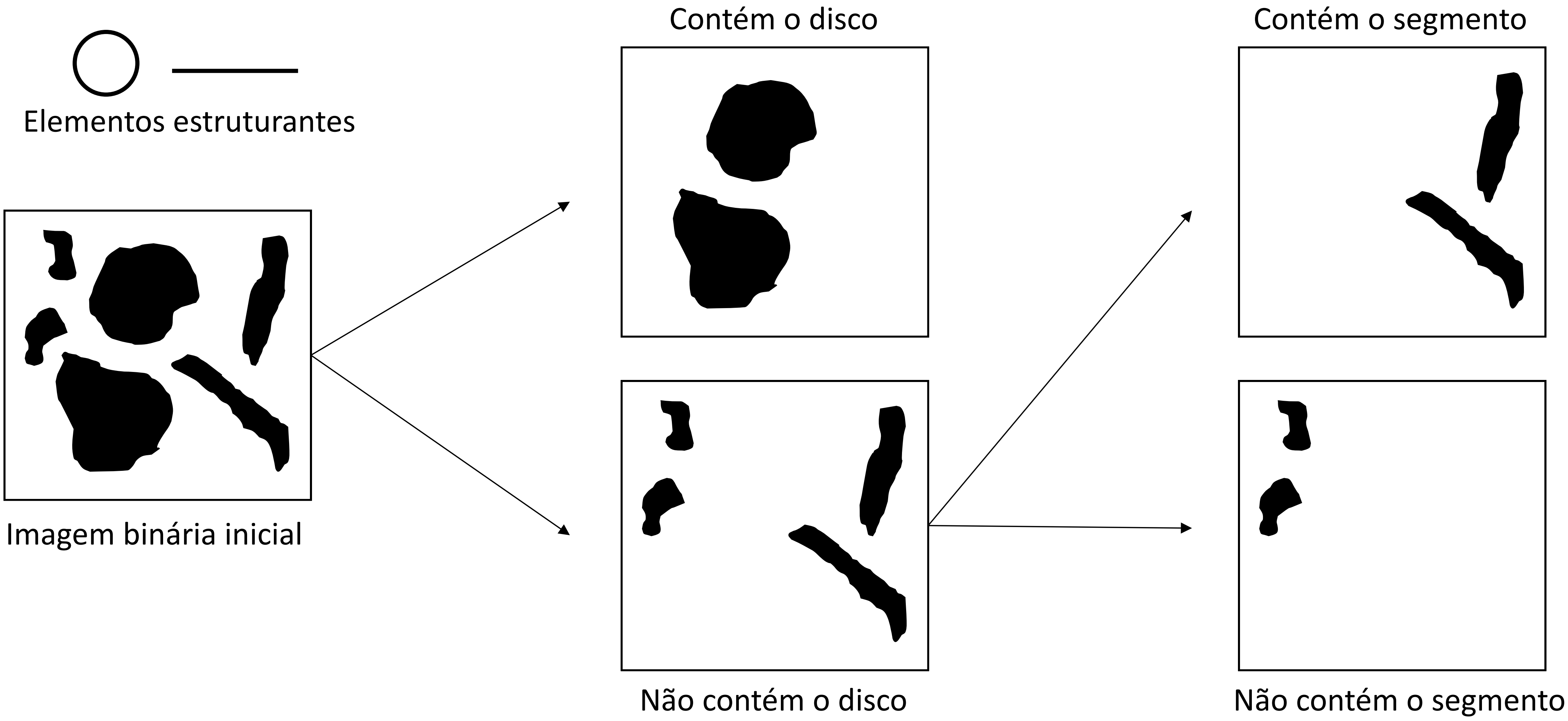
Noção de elemento estruturante

A forma de B pode ser qualquer, sendo as mais comuns o quadrado, o disco, o segmento, o círculo, o par de pontos e o hexágono (na malha digital hexagonal), que são escolhidos de acordo com os objectivos pretendidos. Por exemplo:

- DISCO: determinação da distribuição de tamanho dos objectos (granulometria).
- SEGMENTO: detecção de alinhamentos preferenciais.
- PAR DE PONTOS: caracterização do estado de dispersão (covariância).
- CIRCUNFERÊNCIA: estudo da vizinhança de um ponto (transformação de vizinhança).

Fernando Soares

Noção de elemento estruturante



Fernando Soares

Noção de elemento estruturante

O centro, ou pixel de referência de B é geralmente o seu centro geométrico, podendo contudo ser definido qualquer outro ponto para o efeito.

O centro de B marca a sua posição sobre a imagem inicial e, por conseguinte, a posição do pixel transformado.

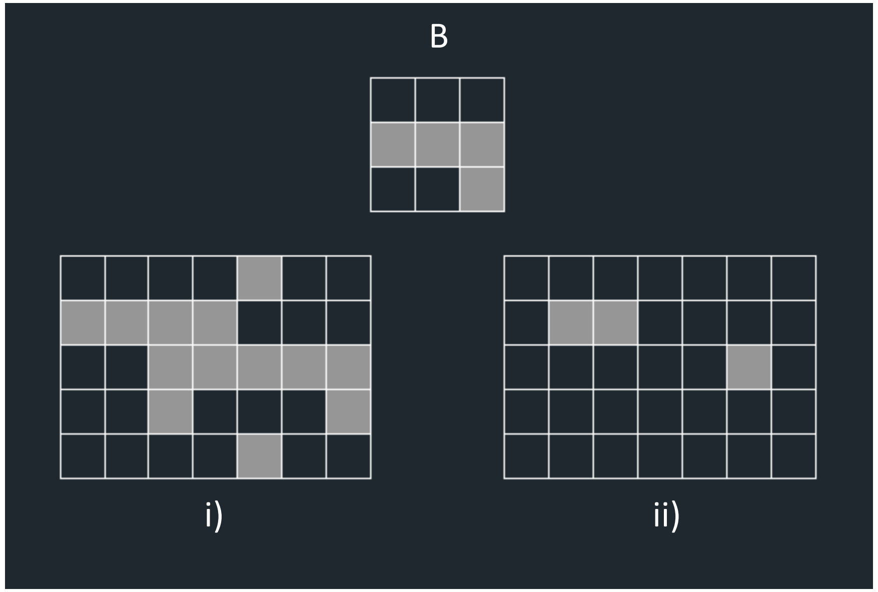
A distribuição dos valores dos pixels no interior de B designa-se por configuração de vizinhança (V).

Fernando Soares

Transformação de vizinhança

Uma **transformação de vizinhança** consiste na identificação/alteração de um pixel de uma imagem no caso de se verificar uma dada configuração de vizinhança V em redor desse pixel.

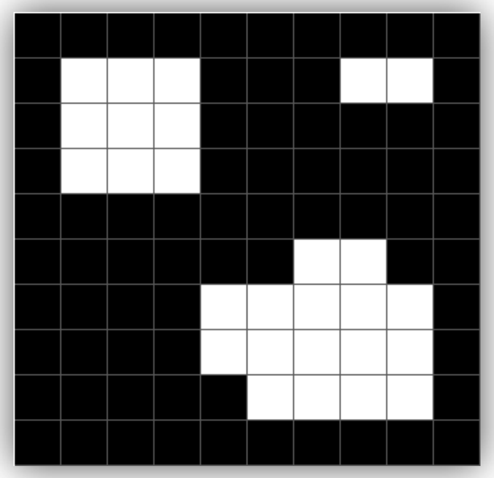
- Na figura, tem-se um quadrado elementar B que percorrerá todos os pixels da imagem i).
- Em ii) estão marcadas as posições em que a configuração de vizinhança $V(B_x)$ é idêntica à de B.
- Como transformações de vizinhança mais comuns têm-se o adelgaçamento e o espessamento.



Transformações morfológicas elementares

A transformação morfológica de **erosão** (ε) de um dado conjunto X, por um elemento estruturante com a sua origem em *x* (B_x), define-se pela expressão seguinte:

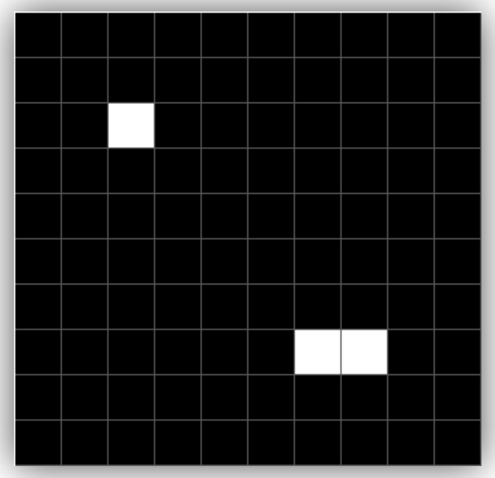
$$\varepsilon_B(X) = \{x: B_x \subset X\}$$



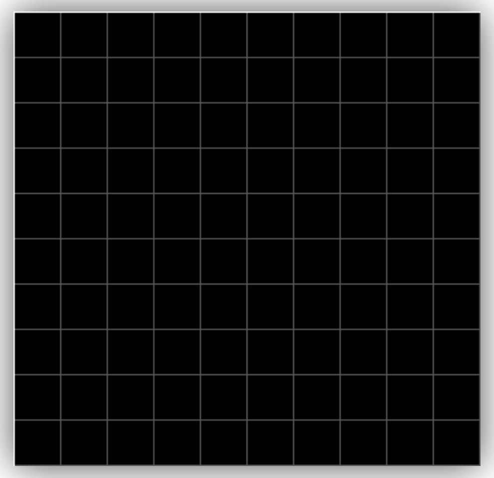
X

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1



$\varepsilon_{B_{x(3\times3)}}(X)$

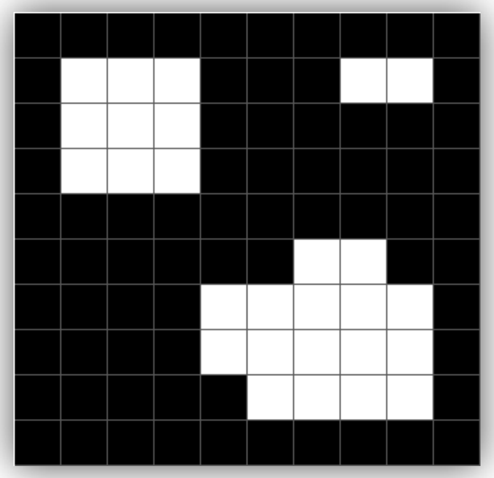


$\varepsilon_{B_{x(5\times5)}}(X)$

Transformações morfológicas elementares

A transformação morfológica de **dilatação** (δ) de um dado conjunto X, por um elemento estruturante com a sua origem em x (B_x), define-se pela expressão seguinte:

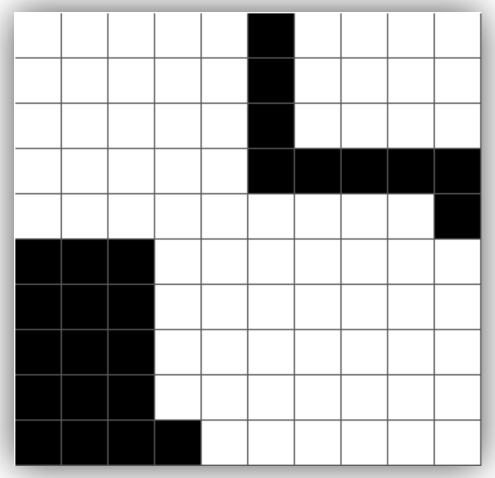
$$\delta_B(X) = \{x: B_x \cap X \neq \phi\}$$



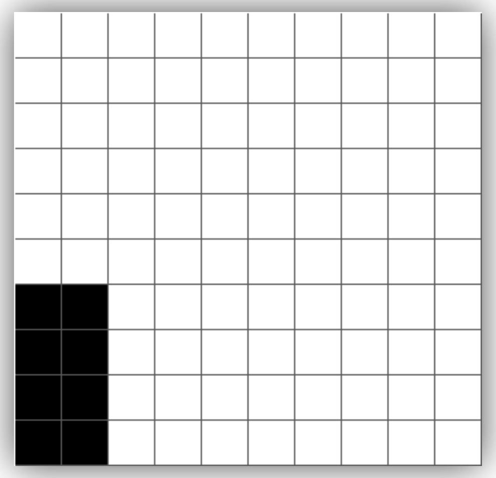
X

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1



$\delta_{B_{x(3\times3)}}(X)$

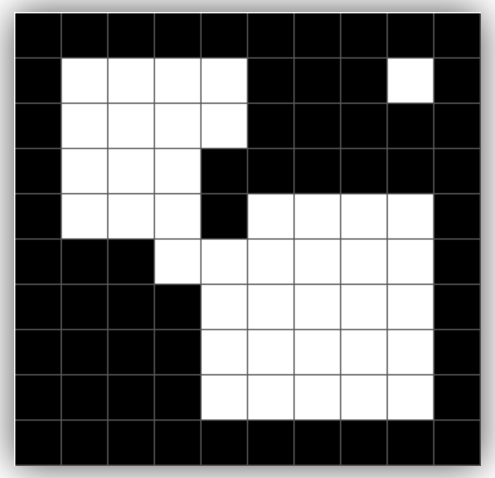


$\delta_{B_{x(5\times5)}}(X)$

Transformações morfológicas elementares

A **abertura** (γ) de X consiste em executar a dilatação do resultado da erosão do conjunto X.

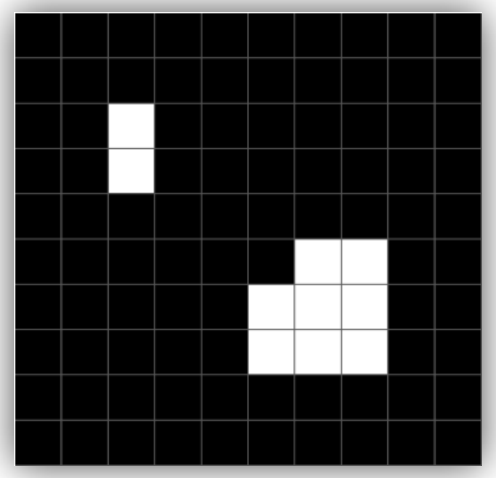
$$\gamma_B(X) = \delta_B(\varepsilon_B(X))$$



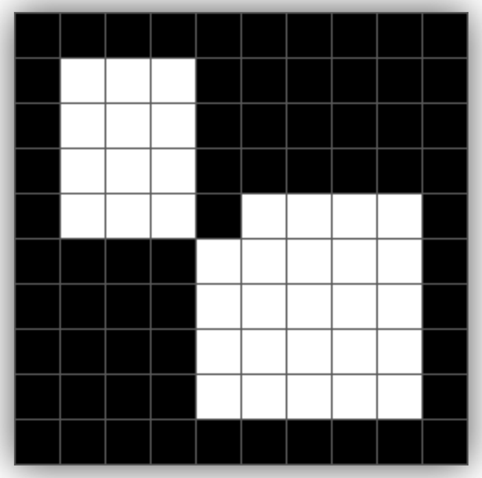
X

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1



$\varepsilon_{B_{x(3\times3)}}(X) = Y$

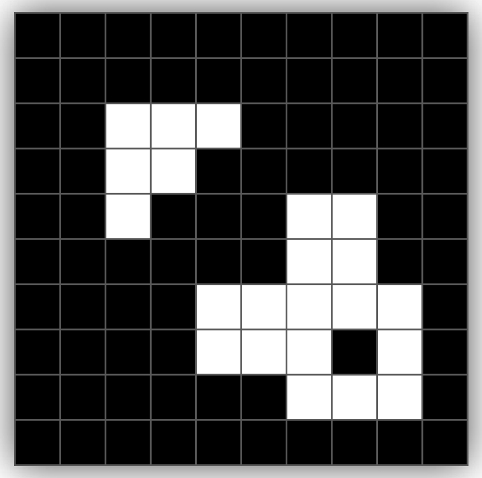


$\delta_{B_{x(3\times3)}}(Y) = \gamma_B(X)$

Transformações morfológicas elementares

O **fecho** (ϕ) de X consiste em executar a erosão do resultado da dilatação do conjunto X.

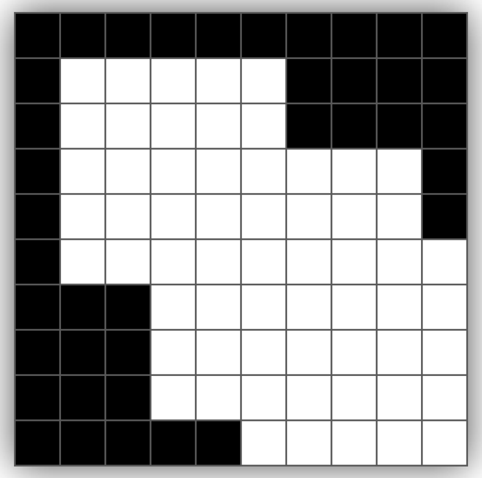
$$\phi_B(X) = \varepsilon_B(\delta_B(X))$$



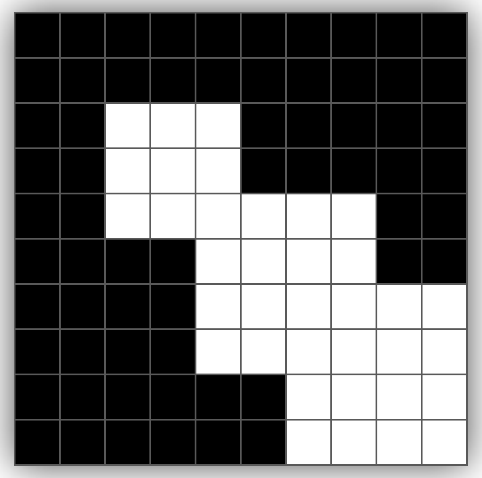
X

B

1	1	1
1	1	1
1	1	1



$\delta_{B_{x(3\times3)}}(X) = Y$



$\varepsilon_{B_{x(3\times3)}}(Y) = \phi_B\ (X)$

Ciências ULisboa

Transformações morfológicas elementares

- Tabela de propriedades das transformações morfológicas elementares:

	Extensiva	**Anti-extensiva**	**Crescente**	**Idempotente**	**Homotópica**	**Transformação dual**
Erosão	-	x	x	-	-	*Dilatação*
Dilatação	x	-	x	-	-	*Erosão*
Abertura	-	x	x	x	-	*Fecho*
Fecho	x	-	x	x	-	*Abertura*

Fernando Soares

Transformação Tudo-ou-Nada (*Hit-or-Miss*)

A **transformação "Tudo-ou-Nada"** (*Hit-or-Miss transformation - HMT*) aplicada a X consiste numa transformação de vizinhança que recorre a um elemento estruturante composto $B = (B_1,B_2)$, com $B_1 \cap B_2 = \phi$, e que resulta da verificação simultânea das seguintes condições: <u>B_1 coincide com X e B_2 coincide com X^c</u>.

$$HMT_B(X) = \{x: (B_1)_x \subseteq X \wedge (B_2)_x \subseteq X^c\}$$

$$HMT_B(X) = \varepsilon_{B_1}(X) \cap \varepsilon_{B_2}(X^c)$$

- Os índices do elemento estruturante composto são geralmente três: "1" (∈ domínio de B_1), "-1" (∈ domínio de B_2) e "0" (é indiferente).

- A *HMT* é geralmente usada para encontrar configurações específicas em grupos de pixels ou objectos e determina-se pela intersecção entre as erosões de X por B_1 e de X^c por B_2 (como se verá em alguns exemplos a seguir).

Fernando Soares

Transformações “Tudo-ou-Nada” (exemplos)

Pontos isolados (pixels sem quaisquer outros pixels na sua vizinhança).

Desenham-se duas configurações (EE) B_1 e B_2, tal que, $B_1 \subseteq X$ e $B_2 \subseteq X^c$.

B1

0	0	0
0	1	0
0	0	0

B2

1	1	1
1	0	1
1	1	1

Optando por um B composto tem-se a seguinte configuração:

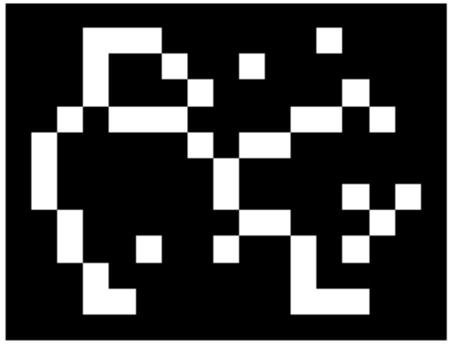
B

-1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

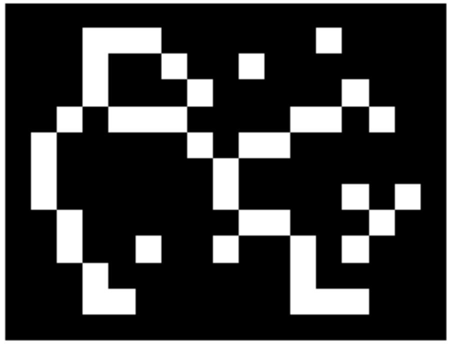
1 = pertence
-1 = pertence ao complementar
0 = indiferente.

Transformações “Tudo-ou-Nada” (exemplos)

Inicial

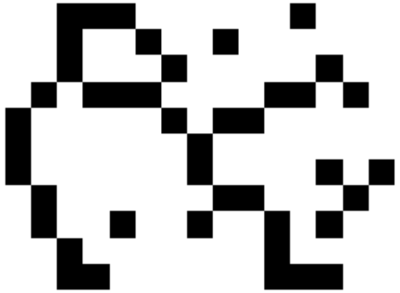


E1

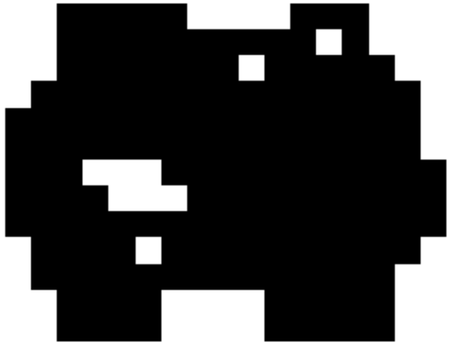


$\varepsilon_{B_1}(X) = \{x: B_1 \subset X\}$

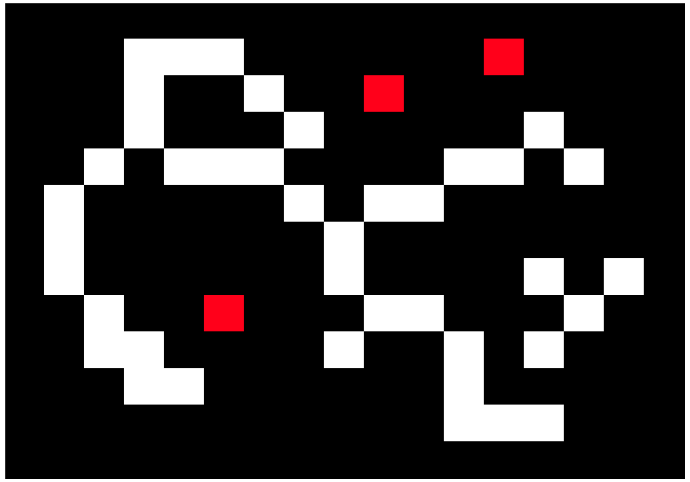
Complementar



E2



$\varepsilon_{B_2}(X^c) = \{x: B_2 \subset X^c\}$



$Pontos\ isolados = \varepsilon_{B_1} \cap \varepsilon_{B_2}$

Transformações "Tudo-ou-Nada" (exemplos)

<u>Pontos extremos</u> (pixels com um pixel no máximo na sua vizinhança próxima).

Usando B_1 e B_2:

B1(90º)

-1	1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

B2(90º)

-1	-1	-1
1	-1	1
1	1	1

B1(45º)

1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

B2(45º)

-1	1	1
1	-1	1
1	1	1

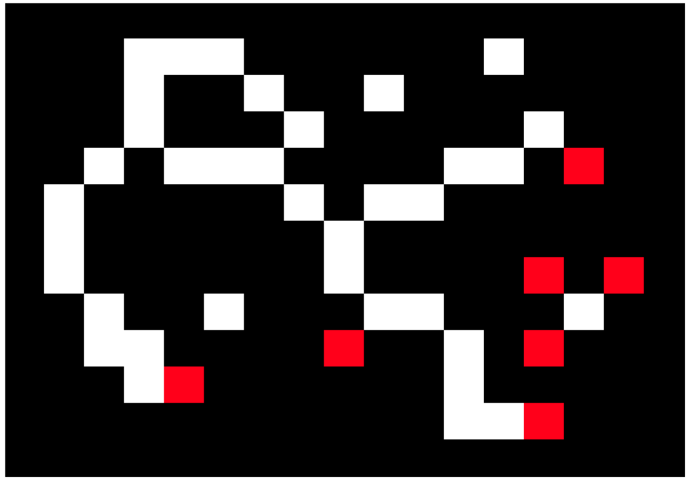
Usando B composto:

B(90º)

0	1	0
-1	1	-1
-1	-1	-1

B(45º)

1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1



Extremidades

Transformações “Tudo-ou-Nada” (exemplos)

Pontos múltiplos (pixels com mais do que dois pixels na sua vizinhança próxima).

Usando B_1 e B_2:

B1(90º)

-1	1	-1
-1	1	-1
1	-1	1

B2(90º)

-1	-1	-1
1	-1	1
-1	1	-1

B1(45º)

1	-1	1
-1	1	-1
1	-1	-1

B2(45º)

-1	-1	-1
-1	-1	1
-1	1	1

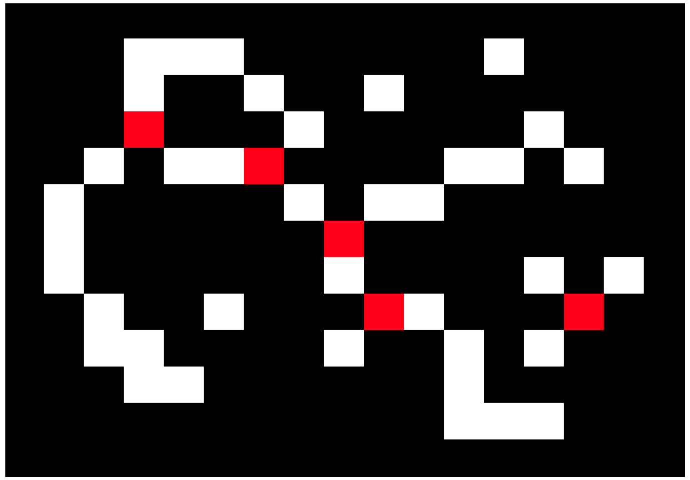
- Usando B composto:

B(90º)

0	1	0
-1	1	-1
1	-1	1

B(45º)

1	0	1
0	1	-1
1	-1	-1



Pontos múltiplos

Transformações "Tudo-ou-Nada" (exemplos)

<u>Cantos rectos</u> (pixels que formam um ângulo recto convexo).

Usando B_1 e B_2:

B1

-1	1	-1
-1	1	1
-1	-1	-1

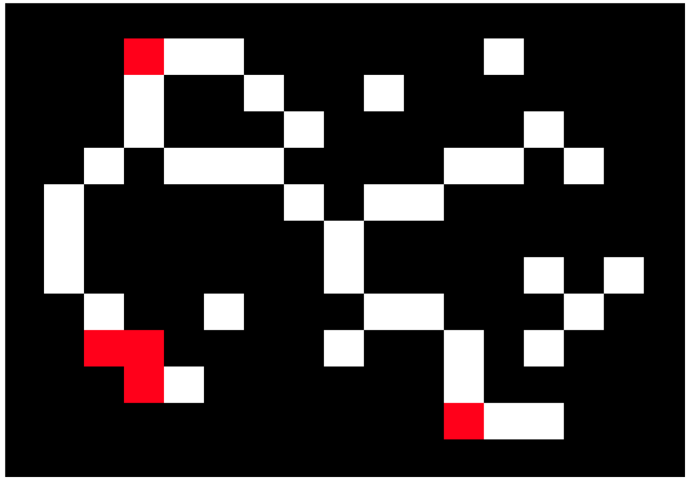
B2

-1	-1	-1
1	-1	-1
1	1	-1

Usando B composto:

B

0	1	0
-1	1	1
-1	-1	0



Cantos rectos

Fernando Soares

Transformações “Tudo-ou-Nada” (exemplos)

<u>Contornos</u> (pixels com pelo menos um pixel pertencente ao conjunto complementar na sua vizinhança próxima).

Usando B_1 e B_2:

B1(90º)

-1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

B2(90º)

-1	1	-1
-1	-1	-1
-1	-1	-1

B1(45º)

-1	1	1
1	1	1
1	1	1

B2(45º)

1	-1	-1
-1	-1	-1
-1	-1	-1

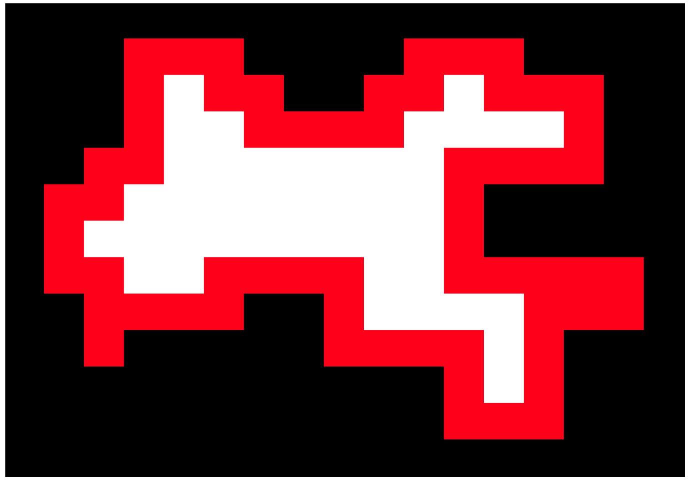
Usando B composto:

B(90º)

0	-1	0
0	1	0
0	0	0

B(45º)

-1	0	0
0	1	0
0	0	0



$Pontos\ de\ fronteira$

Ciências ULisboa

Transformação de adelgaçamento

Adelgaçamento (THIN) de um conjunto X: consiste numa transformação de vizinhança que retira a X todos pontos que correspondam a uma dada configuração de vizinhança $V(B_x)$.

$$\boxed{THIN(X,B) = X \cap NOT[HMT(X,B)]}$$

Fernando Soares

Transformação de adelgaçamento

Visa remover pixels de regiões/objectos da imagem.

É aplicada apenas a imagens binárias e produz uma imagem binária como resultado.

De forma geral, a operação de adelgaçamento é determinada por translação da origem do elemento estruturante B, por todos os pixels da imagem, comparando em cada um a sua configuração de vizinhança com a configuração dos correspondentes pixels na imagem.

Transformação de adelgaçamento

Havendo uma coincidência entre ambas as configurações, então ao pixel da imagem correspondente à posição do centro de B <u>é atribuído o valor 0</u>; caso contrário mantém-se inalterável.

A erosão e a abertura morfológicas são exemplos de transformações de adelgaçamento.

Fernando Soares

Transformação de adelgaçamento

A “**esqueletização**” é um exemplo de um processo de adelgaçamento morfológico que visa reduzir as regiões de uma imagem binária a uma estrutura mínima que preserve a extensão e conectividade das regiões originais.

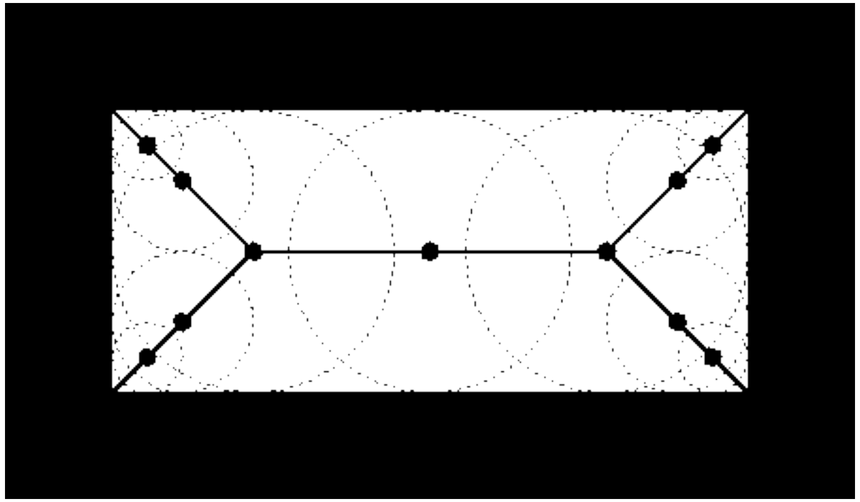
- É uma transformação usada frequentemente para “estreitar” resultados de detecção de fronteiras, reduzindo a espessura das linhas a outras com apenas um pixel de espessura.

- Note-se que o esqueleto resultante é um conjunto conexo é igualmente um conjunto conexo.

Transformação de adelgaçamento

O esqueleto de um conjunto pode ser determinado de diversas formas:

a) Localização dos centros de circunferências máximas bi-tangentes aos limites da região considerada.

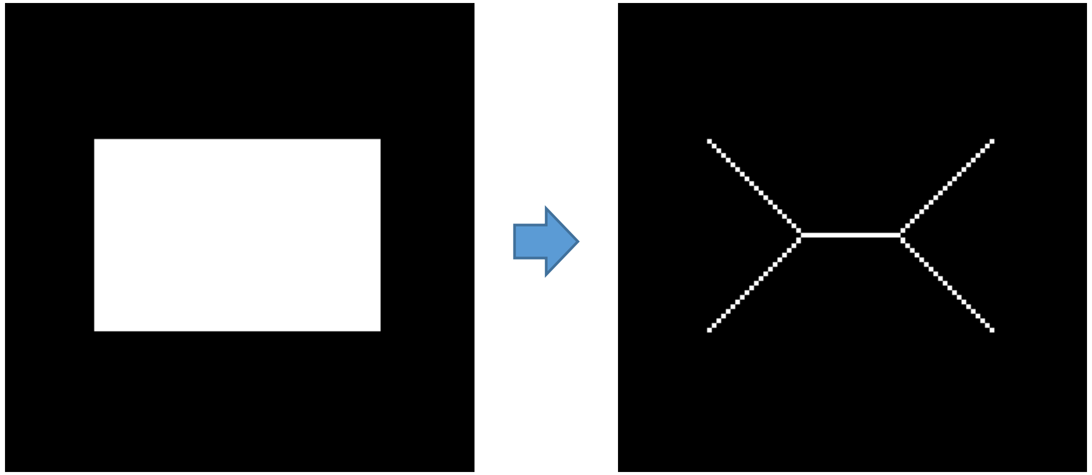


Transformação de adelgaçamento

b) Fórmula de Lantuéjoul: para uma imagem binária discreta X, o esqueleto S(X) é a união de todos os subconjuntos $S_k(X)$, com um elemento estruturante B de dimensão k.

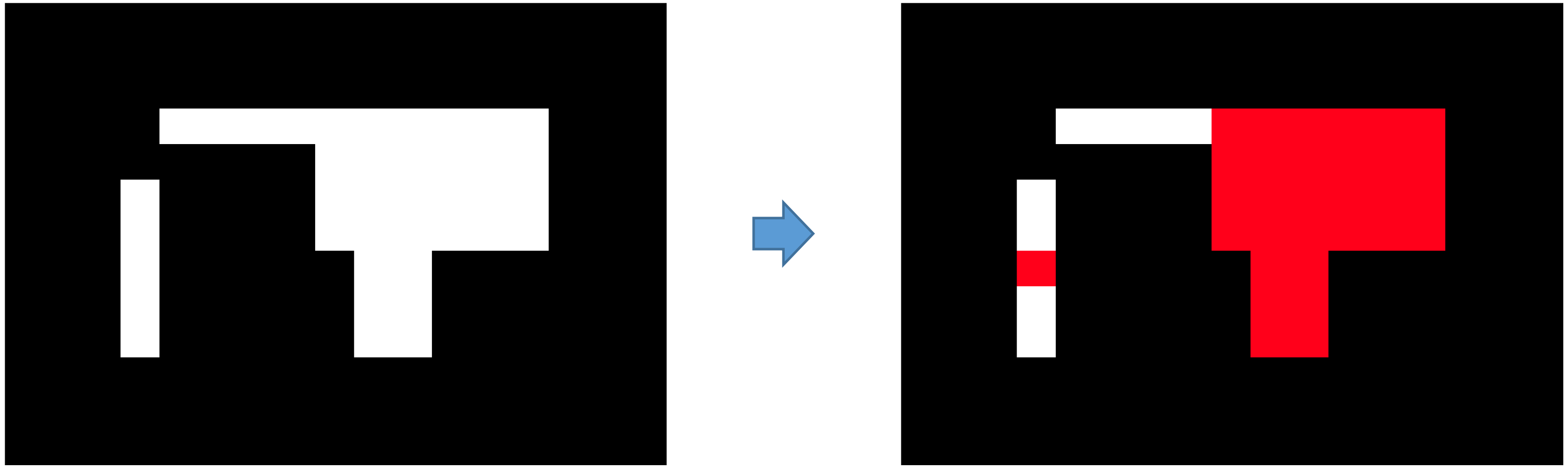
$$S(X) = \bigcup_{k}^{K} S_k(X)$$

$$S_k(X) = \varepsilon_{kB}(X) \cap NOT[\gamma_B(\varepsilon_{kB}(X))]$$



Transformação de adelgaçamento

O “**escanhoamento**” (*prune*) é também uma operação de adelgaçamento que visa suprimir sucessivamente os pontos extremos de um conjunto binário, até se verificar a condição de idempotência.



Ciências ULisboa

Transformação de espessamento

Espessamento (THICK) de um conjunto X: consiste numa transformação de vizinhança que adiciona a X todos pontos que correspondam a uma determinada configuração de vizinhança V(B_x).

$$\boxed{THICK(X, B) = X \cup HMT(X, B)}$$

Transformação de espessamento

Visa fazer crescer regiões/objectos adicionando pixels às mesmas.

É aplicada apenas a imagens binárias e produz uma imagem binária como resultado.

É usada em diversas aplicações, entre as quais a determinação do espaço convexo de um certo conjunto de pontos (*convex hull*), ou ainda na determinação do "esqueleto por zonas de influência" (SKIZ- *Skeleton by Influence Zone*).

Fernando Soares

Transformação de espessamento

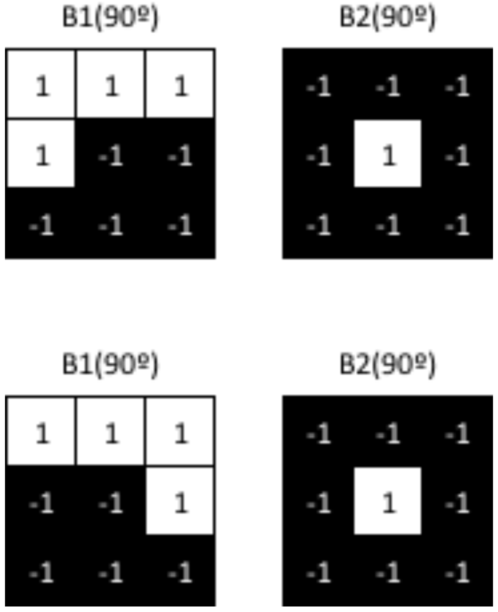
De forma geral, a operação de espessamento é determinada por translação da origem do elemento estruturante B, por todos os pixels da imagem, comparando em cada um a sua configuração de vizinhança com a configuração dos correspondentes pixels na imagem.

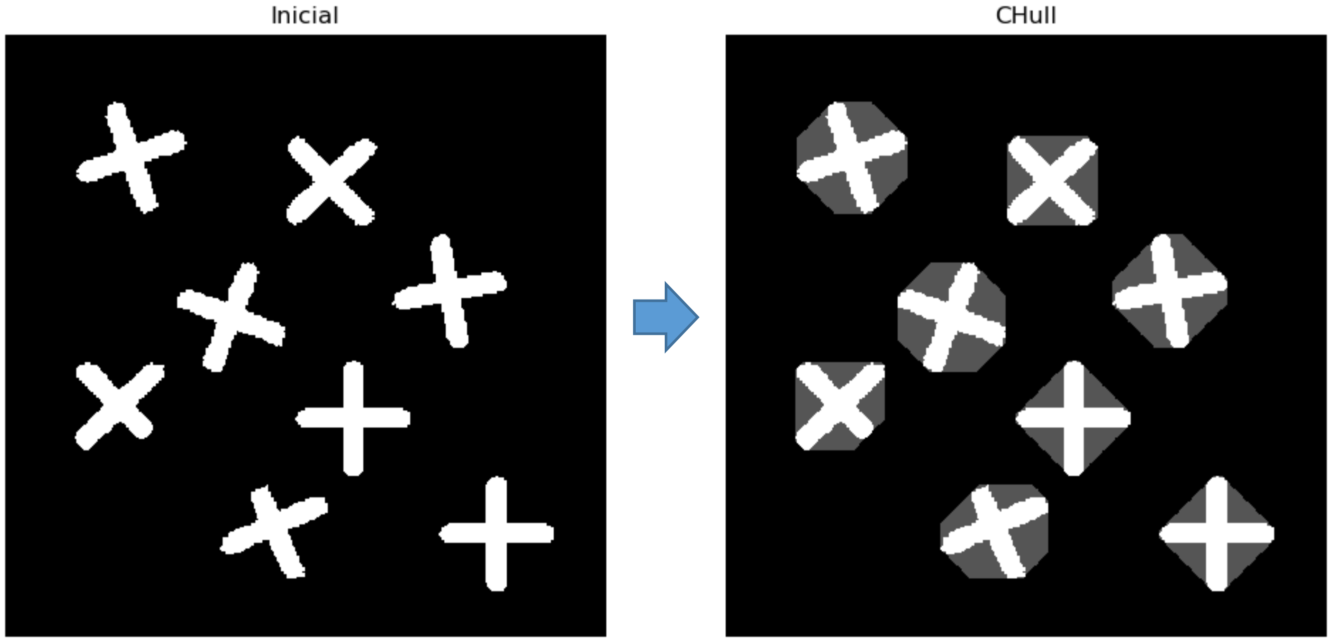
Se se verificar uma coincidência entre ambas as configurações, então no pixel correspondente à posição do centro de B <u>é atribuído o valor 1</u>; caso contrário mantém-se inalterável.

A dilatação e o fecho morfológicos são exemplos de transformações de espessamento.

Transformação de espessamento

O “**envelope convexo**” (*convex hull*) determina-se por execução da transformação HMT, para determinar concavidades nos objectos e consequente preenchimento. A operação é iterativa e continuará até atingir a idempotência.





Convex Hull

Fernando Soares

Transformação de espessamento

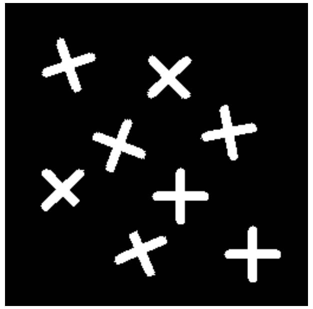
O ”*skeleton by influence zones*” (SKIZ) é uma estrutura de esqueleto que divide uma imagem em regiões, cada qual contendo um objecto distinto da imagem.

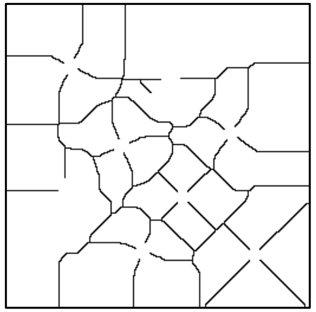
- As fronteiras são definidas por forma a que todos os pontos interiores a cada área estejam mais próximos do correspondente objecto interior a essa área.

- É por vezes designada por *Diagrama de Voronoi*. A operação é iterativa e continuará até atingir a idempotência.

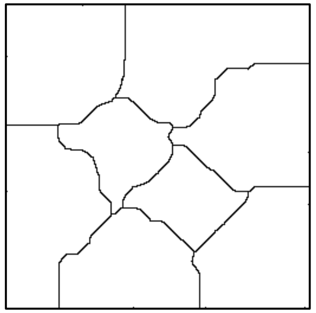
Transformação de espessamento

O SKIZ pode ser obtido por um processo métrico, calculando distâncias euclidianas, ou por processos morfológicos, envolvendo dilatações com elementos estruturantes de diferentes tamanhos.





Esqueleto do *background*



Escanhoamento do esqueleto

Fernando Soares

Transformações geodésicas binárias

As **transformações geodésicas** binárias são transformações morfológicas sobre uma imagem binária Y, condicionadas por uma determinada geodesia binária X.

- De entre estas transformações salientam-se:

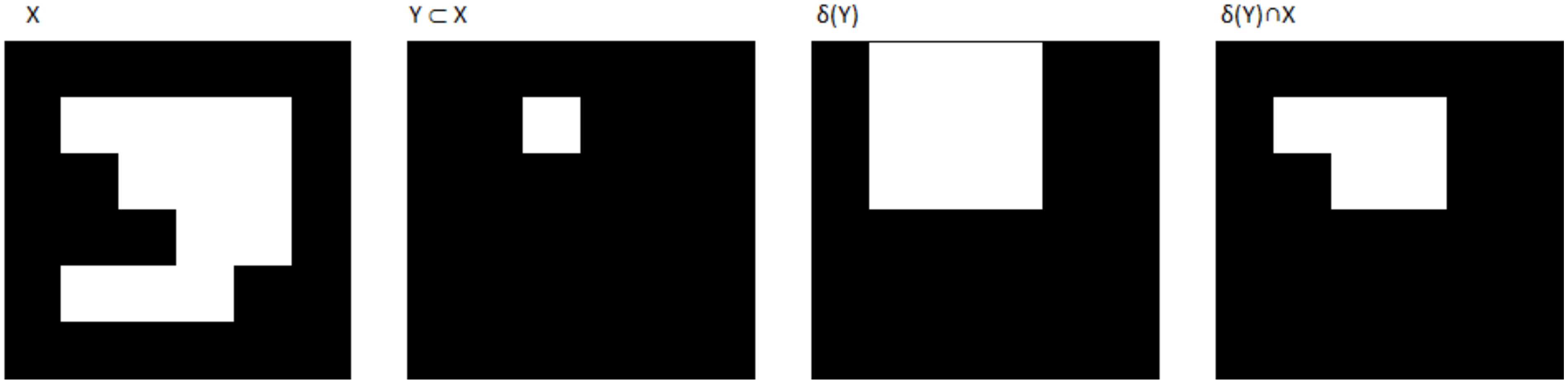
1 - Reconstrução geodésica binária por dilatações geodésicas sucessivas.

2 - Reconstrução geodésica binária por erosões geodésicas sucessivas.

Transformações geodésicas binárias

Dilatação geodésica: dilatação morfológica de um conjunto Y condicionada à geodesia X.

$$\boxed{\delta_X(Y) = \delta(Y) \cap X}$$



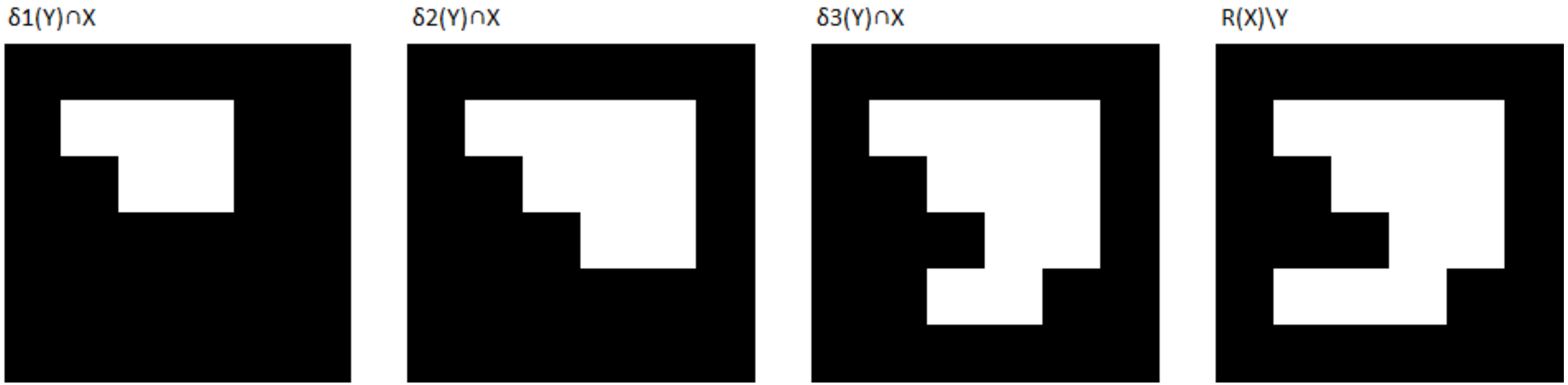
Geodesia

Marcador

Transformações geodésicas binárias

Reconstrução geodésica binária por dilatações geodésicas sucessivas:

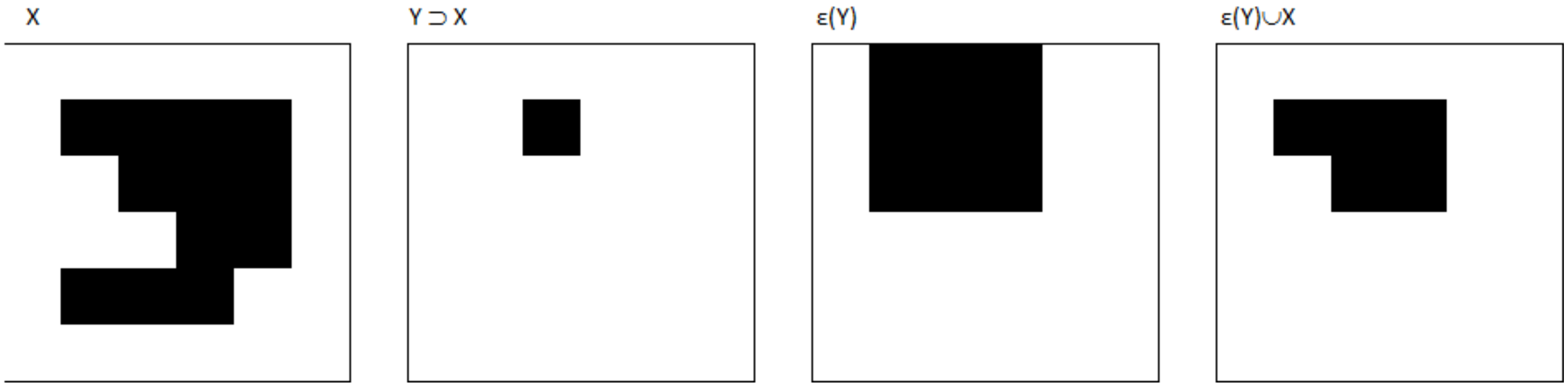
$$R_X(Y) = \delta_X^{\infty}(Y) = \lim_{n\to\infty} (\delta_X \; o \ldots o \; \delta_X)(Y) = \delta_X^{n}\left(\delta_X^{n-1}\left(\delta_X^{n-2}\left(\ldots\left(\delta_X^{1}(Y)\right)\right)\right)\right)$$



Transformações geodésicas binárias

Erosão geodésica: erosão morfológica de um conjunto Y condicionada à geodesia X.

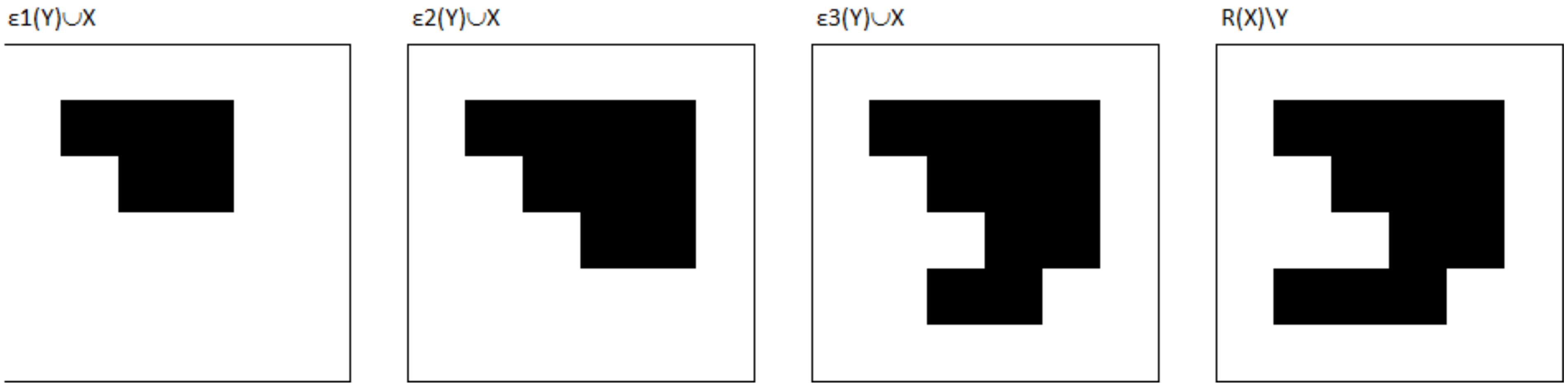
$$\boxed{\varepsilon_X(Y) = \varepsilon(Y) \cup X}$$



Transformações geodésicas binárias

Reconstrução geodésica binária por erosões geodésicas sucessivas:

$$R_X(Y) = \varepsilon_X^{\infty}(Y) = \lim_{n\to\infty}(\varepsilon_X \; o \; \dots \; o \; \varepsilon_X)(Y) = \varepsilon_X^{n}\left(\varepsilon_X^{n-1}\left(\varepsilon_X^{n-2}\left(\dots\left(\varepsilon_X^{1}(Y)\right)\right)\right)\right)$$

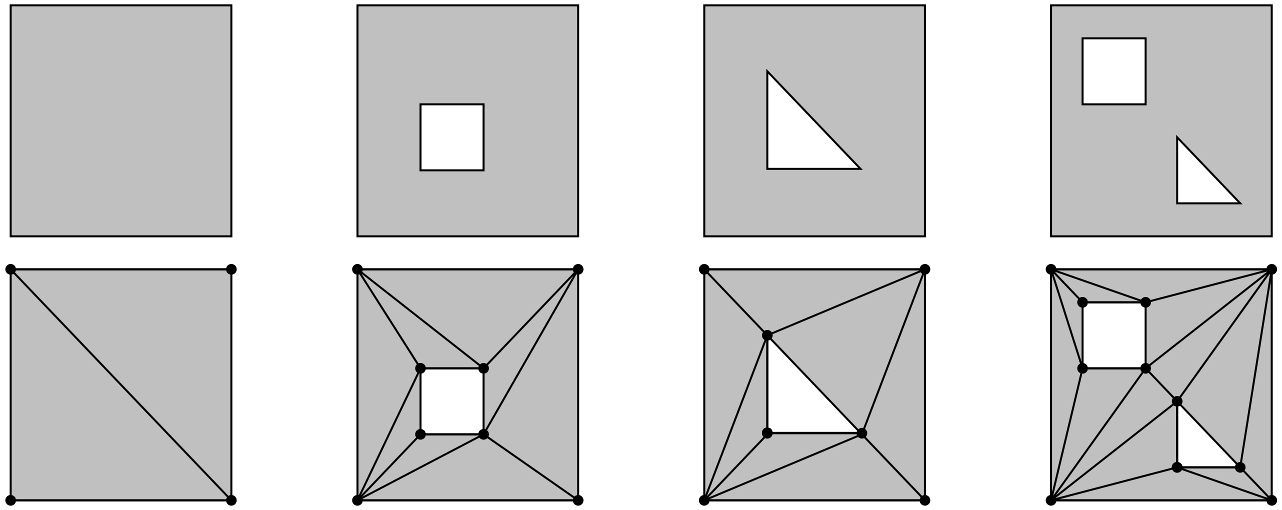


Ciências
ULisboa

Número de conectividade (nº de Euler)

De forma geral, o **número de conexidade** de uma superfície ou conjunto, ou também chamado número de Euler (E), é igual ao número de vértices *v*, menos o número de arestas *a*, mais o número de polígonos *p*, quando dividida a dita superfície em polígonos planos definidos pelas arestas e pelos vértices.

$$E = v - a + p$$

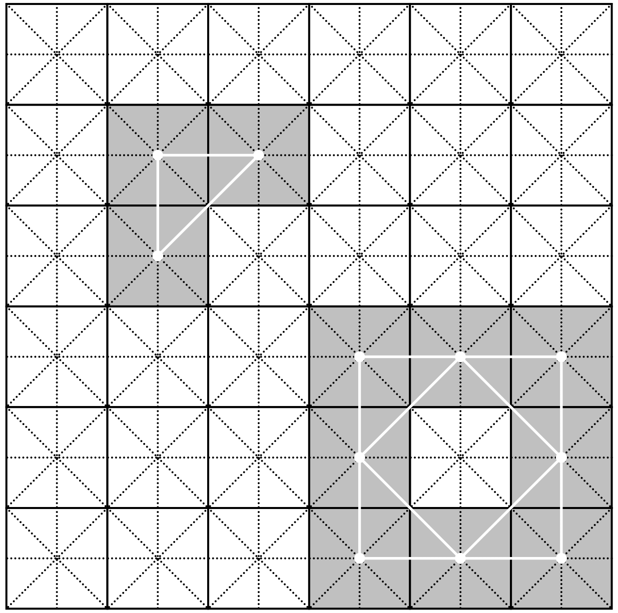


$E = 4 - 5 + 2 = 1$ $E = 8 - 16 + 8 = 0$ $E = 7 - 14 + 7 = 0$ $E = 11 - 25 + 13 = -1$

Fernando Soares

Número de conectividade (nº de Euler)

- No domínio de representação de uma imagem digital, o valor de E determina-se a partir do grafo de representação dos pixels. A seguir exemplifica-se a determinação de E para o objecto binário sombreado.



Número de pixels = 11
Número de arestas do grafo = 15
Número de triângulos = 5
E = 11- 15 + 5 = 1

$$E = v - a + p$$

Número de objectos = 2
Número de buracos = 1

E = 2-1 = 1